1. Verdadero o Falso

1. *FALSO. Si* $P(Z<0)=0.5$, *necesariamente* $P(1<Z<0)\neq 0.5$. *No hace falta buscar en tabla.*
2. *FALSO.* $P(145<X<155)=P(-1<Z<1)=0.6826\neq 0.9$
3. *FALSO. Por definición de independencia. Cierto para la f.d.a. de la* ***conjunta***. *No la f.d.a. del producto*
4. *VERDADERO. Por propiedad fundamental vista en clase. Pero demostrarlo es muy sencillo.*
   Cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)=E(X).E(Y)-E(X).E(Y)=0.
5. *FALSO. Ya que las unidades de* μ *y de* σ^2 *no se pueden sumar. No hace falta hacer más cuentas.*

2.1. Determine el valor de k. $\iint_R f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow$ *Despejar "k"*

$$(1)\quad \int_0^2\int_y^2 kx\,dxdy=\int_0^2 k\frac{x^2}{2}\Big|_y^2 dy=\int_0^2 k\left(2-\frac{y^2}{2}\right)dy=k\left(2y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^2=k\left(4-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}k$$

$$(2)\quad \int_0^2\int_0^x kx\,dxdy=\int_0^2 kx\,y|_0^x dx=\int_0^2 kx^2\,dx=k\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}k$$

De cualquiera de las dos formas (1) o (2) *se tiene que* $\frac{8}{3}k=1 \Rightarrow \boxed{k=\frac{3}{8}}$ *(Respuesta)*

2.2. Si la demanda de Coca-Cola es de 1500 unidades (X=1.5), ¿cuál es la demanda esperada de Pepsi-Cola?

Piden $E(Y|X=1.5)$*; pero* $E(Y|X=X_0)=\int y f_{y|x=x_0}dy$ y $f_{Y|X=x_0}(y)=\frac{f_{XY}(x_0,y)}{f_X(x_0)}=\frac{kx_0}{kx_0^2}=\frac{1}{x_0}$ $\quad 0\le y\le x_0$, *cero en otro caso*

$E(Y|X=x_0)=\int_0^{x_0} y\frac{1}{x_0}dy=\frac{1}{x_0}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x_0}=\frac{x_0^2}{2x_0}=\frac{x_0}{2}$; $x_0=1.5 \Rightarrow E(Y|X=x_0)=0.75=\boxed{750\ Unidades}$ *(Respuesta)*

2.3. ¿Qué distribución sigue $Y\,|\,X=x$?

$$f_{Y|X=x}=\frac{1}{x}\Rightarrow \boxed{Y|(X=x)\sim Unif(0,x)}\quad (Respuesta)$$

3.1. Halle la densidad conjunta de X y Y.

$$\boxed{f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2} & si\ x^2+y^2\le R^2\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}}\quad (Respuesta)$$

3.2. ¿Son X y Y independientes? Justifique.

No, ya que f_{XY} *no factoriza como* $g(x).h(y)$*. Menos puede ser el producto de las marginales* $f_X(x).f_Y(y)$. *(Respuesta)*

Nota: No era necesario calcular las marginales.

$$m_X(x)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\pi R^2}=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2},\ para\ x\in[-R,R];\ cero\ en\ otro\ caso.\ Similarmente,(incluso\ por\ simetria),\ m_Y(y)=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}.1\ (y\in[-R,R])$$

3.3. Sea D la distancia entre el blanco (lugar donde debe caer el paquete) y donde efectivamente cae. Halle la función de densidad de probabilidad de D.

Manera 1 *(Más facil)* $\quad F_D(d)=\frac{AreaCirculo\ con\ radio\ (d)}{\pi R^2}=\frac{\pi d^2}{\pi R^2}=\frac{d^2}{R^2}\quad 0\le d\le R$

Derivando respecto a d, se obtiene la densidad: $\boxed{f_D(d)=\frac{2d}{R^2}\ \ si\ 0\le d\le R,\ 0\ en\ otro\ caso}$ *(Respuesta)*

Manera 2. *Considerando el cambio a coordenadas polares* $T(x,y)\to(D,\theta)$

$$x=D\cos(\theta)\ ;\ y=D\sin(\theta)\qquad J(D,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial D} & \frac{\partial y}{\partial D}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -D\sin(\theta) & D\cos(\theta)\end{vmatrix}=D$$

$$f_{D\theta}=f_{xy}(x(D,\theta),y(D,\theta)).|J|\quad con\ 0\le D\le R,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\ en\ otro\ caso$$

$$f_{D\theta}=\frac{D}{\pi R^2}\qquad si\quad 0\le D\le R,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\boxed{f_D(d)=\int_0^{2\pi}\frac{d}{\pi R^2}d\theta=\frac{2\pi d}{\pi R^2}=\frac{2d}{R^2}\quad 0\le d\le R,\quad 0\ en\ otro\ caso}\quad (Respuesta)$$

4.1. Demuestre que si X e Y son v.a. exponenciales, independientes, con parámetros μ y λ, respectivamente, entonces la distribución del mínimo es también exponencial y determine su parámetro.

Sea $U=U(X,Y)=\min(X,Y)\qquad P(U>k)=P(X>k,Y>k)=P(X>k)*P(Y>k)=\left(\int_k^\infty \mu e^{-\mu t}dt\right)\left(\int_k^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt\right)$

$$P(U>k)=e^{-(\mu)k}*e^{-(\lambda)k}=e^{-(\mu+\lambda)k}\Rightarrow \boxed{U\sim\exp(\mu+\lambda)}\quad (Respuesta)$$

Nota al estudiante: La respuesta $U\sim\exp(1/\mu+1/\lambda)$ *también es correcta. Las dos posibles respuestas obedecen a la formulación de la densidad exponencial en términos de la media o en términos de la tasa (1/media).*

Nota: Este simulacro es puramente de referencia y complementario. No sustituye las clases, libros, tareas etc. Prof. Hugo Montesinos